Naivní teorie množin

Na semináři a k domácímu cvičení

1. Co lze říci o množinách $A = \{1; 2; 3; 4\}$, $B = \{1; 1; 2; 2; 3; 3; 4; 4\}$, $C = \{4; 1; 2; 3\}$?
2. Množiny $A = \{2; 4; 6; 8\}$, $B = \{1; 2; 4; 8\}$, $C = (0; 4)$ určete pomocí charakteristické vlastnosti.
3. Jsou dány množiny $A = \{x \in \mathbb{R};\ \exists n \in \mathbb{N}_0 :\ (x = n^2) \wedge (|x| < 11)\}$ a $B = \{x \in \mathbb{N};\ (2|x) \wedge x + 2 < 10\}$. Určete (a) $A \cap B$, (b) $A \cup B$, (c) $A \setminus B$, (d) $B \setminus A$, (e) A^B (f) B^A.
   (g) Dále rozhodněte, zda $A \subset B$ nebo $B \subset A$.
4. Pomocí Vennových diagramů ukažte platnost tzv. De Morganových vzorců:
   (1) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, (2) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
5. *Když už jsme u Vennových diagramů…* Z 15 kontrolovaných lavic je poškrábaných nebo popsaných 14 kusů. 10 lavic má nejvýše jeden druh poškození. Poškrábaných lavic je o 3 více než popsaných.
   Kolik lavic je: a) jenom poškrábaných? b) popsaných i poškrábaných?
6. *A ještě jednou Vennovy diagramy…* Podivínský rozhodčí milující statistiky mi ale hledání neusnadnil – místo databáze partií hráčů, a tedy jejich oblíbených zahájení, mi poskytl jenom obecný přehled o všech 30 hráčích turnaje. Naštěstí tři různá zahájení nehraje nikdo. Ale 20 % hráčů hraje orangutana a zahájení jezevec hraje o 5 hráčů víc než orangutana. Křováckou obranu hraje o 3 hráče méně než jezevce. Dva hráči hrají jezevce i orangutana. Deset hráčů nemá žádné oblíbené zahájení a své první tahy v každé partii volí úplně nahodile – obvykle podle tajemného rituálu „EN-TEN-TÝ-KY-DVA-ŠPA-LÍ-KY-… “ To bude zase příprava na partii! Kolik hráčů vlastně hraje právě dvě zahájení? [PIKOMAT]
7. Víme, že $|A| = 7$ a $|B| = 5$, co můžeme říci o $|A \cup B|$? Co můžeme říci o vzájemném vztahu A, B?
8. Jsou dány množiny $A = \{x \in \mathbb{R};\ \exists n \in \mathbb{N} :\ x = 2n\}$, $B = \{n \in \mathbb{N};\ 3|n\}$, $C = \{n \in \mathbb{N};\ 5|n\}$. Vyjádřete: a) $A \cup B$, b) $A \cap B$, c) $C \setminus A$, d) $A \cap B \cap C$,
   e) Platí, že $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
9. Určete $\overline{(-3;\ 4\rangle}$.
10. Jsou dány množiny $A = \{x \in \mathbb{N};\ x|60\}$ a $B = \{x \in \mathbb{N};\ x \in (7;\ 10\rangle\}$.
    Určete: a) $A \cap B$, b) $A \cup B$, c) $B \setminus A$.
11. Nalezněte takové množiny A, B, pro které platí:
    - $A \cup B = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$
    - $A \cap B = \{1; 2; 3\}$
    - $B \setminus A = \{5; 6\}$
12. Doplněk množiny $\{x \in \mathbb{R};\ -3 < x \leq 5\}$ v množině reálných čísel, zapište jako sjednocení intervalů.
13. Je dán hotel o nekonečně mnoho pokojích očíslovaných pomocí přirozených čísel – Hilbertův hotel.
    (a) Jak může recepční ubytovat jednoho nově příchozího hosta, je-li již hotel plně obsazen?
    (b) Jak může recepční ubytovat nekonečně mnoho nově příchozích, je-li již hotel plně obsazen?

Co si promyslet do příště

1. Jak do Hilbertova hotelu ubytovat nekonečně mnoho osob z nekonečně mnoho autobusů.
2. Dokažte, že posloupnost $(n^2)_{n=0}^{\infty}$ diverguje k nekonečnu.
3. Zjistěte, co jsou to Zenonovy aporie a pokuste se vysvětlit, proč byly soudobě považovány za „myšlenkové pasti“. Jak se dnes můžeme s aporiemi pomocí matematiky snadno vypořádat?
4. **Vyřešit příklady 1. – 4. na zadní straně tohoto papíru!**

Rovnice

... následující příklady pocházejí ve valné většině ze sbírky úloh: PETÁKOVÁ, Jindra. (2004). MATEMATIKA – příprava k maturitě a přijímacím zkouškám na vysoké školy. Prometheus. Praha.

1. Pro $x \in \mathbb{R}$ vyřešte rovnice:

   (a) $4x^2 + 8x + 12 = 0\,,$
   (b) $\left(\frac{x}{x-1} - \frac{x+1}{x}\right) : \left(\frac{x}{x+1} - \frac{x-1}{x}\right) = \frac{x+1}{x-1}\,,$
   (c) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0\,,$
   (d) $\frac{4}{x+\sqrt{x^2+x}} - \frac{1}{x-\sqrt{x^2+x}} = \frac{3}{x}\,,$
   (e) $6x^4 + 17x^3 + 17x^2 + 17x + 6 = 0\,,$
   (f) $|2x+1| - |x| = 2 - x\,,$
   (g) $5^x \cdot 2^x = 100^{x-1}\,,$
   (h) $\frac{81}{16} = \left(\frac{2}{3}\right)^x \left(\frac{9}{4}\right)^{x+1}\,,$
   (i) $3^x + 3^{x+1} = 108\,,$
   (j) $3^x + 3^{x+1} = 7 \cdot 4^x - 4^{x+1}\,,$
   (k) $\log_2 \log_3 \log_{\frac{1}{2}} = 0\,,$
   (l) $\log_8 \sqrt{x+30} + \log_8 \sqrt{x} = 1\,,$
   (m) $\log_2^2 x + 2\log_2 x = 3\,,$
   (n) $\frac{\log x + 3}{3 - \log x} = 5\,,$
   (o) $x^{\log x + 2} = 100x\,,$
   (p) $\log_9 x + \log_3 x = 6\,,$
   (q) $\log_2 3 + \log_2 4^{x+\sqrt{x}} = \log_2(2^{x+\sqrt{x}+1} + 4) + 2\,,$
   (r) $\frac{1}{2} \sin x = -1\,,$
   (s) $\tan(4x - 3) = 1\,,$
   (t) $\cos(10x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,,$
   (u) $2\sin^2 x + 3\cos x = 0\,,$
   (v) $\sin x = \cos x\,,$
   (w) $\sin x + \sin(2x) = 0\,,$
   (x) $\sin \frac{x}{2} + \cos x = 1\,,$
   (y) $1 + 3x + 9x^2 + \ldots = 10\,,$
   (z) $\sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \ldots = -\frac{1}{3}\,.$

2. Pro $x \in \mathbb{N}$ vyřešte rovnice:

   (a) $\binom{x-1}{x-3} - 2 \cdot \binom{x-2}{x-4} = 0\,,$
   (b) $\frac{10-17x}{(x+1)!} + \frac{4}{(x-1)!} = 0\,.$

3. Zvětší-li se počet prvků o 5, zvětší se počet variací druhé třídy bez opakování z těchto prvků o 1170. Určete původní počet prvků.

4. Zvětší-li se počet prvků o 15, zvětší se počet kombinací druhé třídy vytvořených z těchto prvků třikrát. Určete původní počet prvků.

5. Nalezněte všechny reálné kořeny polynomu $x^5 - 4x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 6$ a tento polynom rozložte na součin.

6. Řešte v $\mathbb{R}$ rovnici $\frac{x+a}{a} = ax - 1$ s parametrem $a \in \mathbb{R}$.

7. Řešte v $\mathbb{R}$ rovnici $\frac{2-a}{a} = \frac{2}{x-1}$ s parametrem $a \in \mathbb{R}$.

8. Řešte v $\mathbb{R}$ rovnici $\frac{m}{x} - \frac{4}{mx} = 1 - \frac{2}{m}$ s parametrem $m \in \mathbb{R}$.

9. Řešte v $\mathbb{R}$ rovnici $1 + \frac{a^2-1}{x} = a$ s parametrem $a \in \mathbb{R}$.

10. Řešte v $\mathbb{R}$ rovnici $\frac{k^2(x-1)}{kx-2} = 2$ s parametrem $k \in \mathbb{R}$.

11. Řešte v $\mathbb{R}$ rovnici $px - \frac{2}{p^2} = \frac{1}{p}(4x+1)$ s parametrem $p \in \mathbb{R}$.

12. Řešte v $\mathbb{N}$ rovnici $(2a-1)x - 6 = ax$ s parametrem $a \in \mathbb{N}$.

13. Řešte v $\mathbb{R}$ rovnici $\frac{x+a}{x+1} = b$ s parametry $a \in \mathbb{R}$ a $b \in \mathbb{R}$.

14. Řešte v $\mathbb{R}$ rovnici $(a-2)x^2 - (a^2 - 2a + 2)x + 2a = 0$ s parametrem $a \in \mathbb{R}$.

15. Při které hodnotě $a \in \mathbb{R}$ je součet druhých mocnin kořenů rovnice $x^2 - (a-2)x - a - 1 = 0$ nejmenší?

16. Řešte v $\mathbb{R}$ rovnici $\sqrt{x - 4a + 16} = 2\sqrt{x - 2a + 4} - \sqrt{x}$ s parametrem $a \in \mathbb{R}$.

17. Řešte v $\mathbb{R}$ rovnici $x + \sqrt{x^2 - x} = a$ s parametrem $a \in \mathbb{R}$.