Na semináři a k domácímu cvičení

1. V Gaussově rovině vyneste obrazy všech komplexních čísel z, pro která platí: $1 < |z| \leq 4$.
2. V Gaussově rovině vyneste obrazy komplexních čísel:

   (a) $a = [1;\, 3] + [0;\, -4]$ (b) $b = [2;\, -3] \cdot [1;\, -2]$ (c) $c = [4;\, -3] : [1;\, -2]$ (d) $d = [|[3;\, 4]|;\, |[0;\, -1]|]$

3. Ukažte, že v oboru komplexních čísel je:
   (a) sčítání asociativní a komutativní
   (b) násobení asociativní a komutativní
   (c) násobení distributivní vzhledem ke sčítání a naopak
   (d) 0 neutrální prvek vzhledem ke sčítání a 1 neutrální prvek vhledem k násobení
4. Určete, pro která $x \in \mathbb{R}$ jsou následující čísla komplexními jednotkami

   (a) $a = \left[x;\, \sqrt{2}\right]$ (b) $b = [x;\, 0]$ (c) $c = [x;\, x]$ (d) $d = \left[\sqrt{3}x;\, \frac{1}{2}\right]$

5. Stanovte reálné, posléze i komplexní, kořeny následujících polynomů:

   (a) $a(x) = x^2 - 9$
   (b) $b(x) = x^2 + 9$
   (c) $c(x) = x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6$
   (d) $d(x) = x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 5x + 6$

6. V Gaussově rovině zakreslete obrazy následujících čísel:

   (a) $a = -4\mathrm{i}$ (b) $b = \frac{7}{3}$ (c) $c = \sqrt{13}\mathrm{i}$ (d) $d = -\frac{1}{1-\sqrt{13}}$ (e) $e = 3 - 4\mathrm{i}$

7. Určete reálná čísla x, y tak, aby si byla komplexní čísla u, v navzájem rovna:

   (a) $u = x^3 + 1;\; v = 3 + (y-1)^2$
   (b) $u = x - 5 - 4\mathrm{i};\; v = \overline{-1 + x\mathrm{i}}$
   (c) $u = (x + 8\mathrm{i}) + (7 - x\mathrm{i});\; v = (1 - y\mathrm{i})v + \bar{\mathrm{i}}$
   (d) $u = (x + y\mathrm{i}) - (5 - y\mathrm{i});\; v = (2x - 5\mathrm{i}) - \overline{(-1 - y\mathrm{i})}$
   (e) $u = (4 - 3\mathrm{i})(x + y\mathrm{i});\; v = 0$

8. Dokažte, že platí:

   (a) $|a| = |\overline{a}|,\ \forall a \in \mathbb{C}$
   (b) $|b| = |-b|,\ \forall b \in \mathbb{C}$
   (c) $c + \overline{c} = 2\mathrm{Re}(c);\ \forall c \in \mathbb{C}$
   (d) $d - \overline{d} = 2\mathrm{Im}(d);\ \forall d \in \mathbb{C}$
   (e) $e \cdot \overline{e} \geq 0;\ \forall e \in \mathbb{C}$
   (f) $\overline{f \cdot g} = \overline{f} \cdot \overline{g};\ \forall f,\ g \in \mathbb{C}$

9. Uveďte do algebraického tvaru následující komplexní čísla:

   (a) $a = \mathrm{i}^{99}$
   (b) $b = \mathrm{i}^{104}$
   (c) $c = \frac{1}{\mathrm{i}}$
   (d) $d = \frac{-5+3\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$
   (e) $e = \frac{\mathrm{i}^{11}(5+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}$
   (f) $f = \left(\frac{1+2\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}\right)^{-1}$

10. V Gaussově rovině zakreslete množinu obrazů všech $z \in \mathbb{C}$, pro která platí:

    (a) $|z| = |\mathrm{i}(3 + \mathrm{i})|$ (b) $\left|\frac{5\mathrm{i}}{3+4\mathrm{i}}\right| \leq |z| \leq |\sqrt{3} - \mathrm{i}|$ (c) $|z - \mathrm{i}| \leq |z + 3\mathrm{i}|$ (d) $|z - 2| + |z + 2| = 8$

11. Rozhodněte, pro která $b \in \mathbb{R}$ je číslo $\frac{2+b\mathrm{i}}{b-\mathrm{i}}$:

    (a) reálné?
    (b) komplexní jednotkou?

12. Vyjádřete v goniometrickém a exponenciálním tvaru komplexní čísla:

    (a) $a = 4$
    (b) $b = 1 - \mathrm{i}$
    (c) $c = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$
    (d) $d = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} - \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4})$

13. Dokažte pravidlo pro součin a podíl komplexních čísel v goniometrickém (a případně i exponenciálním) tvaru.

14. Vypočítejte v goniometrickém a v exponenciálním tvaru součin a podíl čísel u, v:

    (a) $u = 1$; $v = \mathrm{i}$
    (b) $u = 1 - \mathrm{i}$; $v = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$
    (c) $u = 2(\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3})$; $u = (\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6})$
    (d) $u = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2}{3}\pi}$; $v = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{3}\pi}$

15. Dokažte Moivreovu větu.

16. Vyjádřete v algebraickém tvaru:

    (a) $a = (1 + 2\mathrm{i})^6$
    (b) $b = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)^4$

17. Zakreslete v Gaussově rovině obrazy čísel:

    (a) $a = \sqrt{-2}$
    (b) $b = \sqrt[4]{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}}$
    (c) $c = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}}$

18. Nad C vyřešte následující rovnice:

    (a) $\frac{3+\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}x + \frac{10}{3+\mathrm{i}} = (-1 + \mathrm{i})x$
    (b) $2\mathrm{i}z + \mathrm{i}\overline{z} = \mathrm{i}(-3 - 2\mathrm{i})$
    (c) $z - 2\mathrm{i}\overline{z} = \overline{(1 - \mathrm{i})(2 - \mathrm{i})} + 5$
    (d) $z^2 - 4z + 5 = 0$
    (e) $z^2 + 9 = 0$
    (f) $3(z + 1)^2 = 4z - (1 - z)^2$
    (g) $z^2 - 4z + 13 = 0$
    (h) $z^2 + z + 5\mathrm{i} = 0$
    (i) $\mathrm{i}z^2 + z + \mathrm{i} = 0$
    (j) $z^3 - 8 = 0$
    (k) $z^3 + \mathrm{i} = 0$
    (l) $z^4 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i} = 0$
    (m) $z^4 + \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

19. Určete koeficienty a, $b \in \mathbb{R}$ rovnice $x^2 + ax + b = 0$, víte-li, že jedním z jejích kořenů je číslo $4\mathrm{i}$.

20. Určete koeficienty a, $b \in \mathbb{R}$ rovnice $x^2 + ax + b = 0$, víte-li, že jedním z jejích kořenů je číslo $4 + \mathrm{i}$.

21. Určete koeficienty a, $b \in \mathbb{R}$ rovnice $x^2 + ax + b = 0$, víte-li, že jedním z jejích kořenů je číslo $2 - \sqrt{2}\mathrm{i}$.

22. Dokažte, že pokud je α komplexním kořenem (tj. jde o imaginární číslo) rovnice $x^2 + ax + b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, pak je i $\overline{\alpha}$ kořenem této rovnice.